

УДК 534.26

## ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ ЧЕРЕЗ СФЕРИЧЕСКУЮ УПРУГУЮ ОБОЛОЧКУ

Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич, Н.Н. Киселева

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь*

## PENETRATION OF THE SOUND FIELD OF A SPHERICAL RADIATOR THROUGH THE SPHERICAL ELASTIC SHELL

G.Ch. Shushkevich, S.V. Shushkevich, N.N. Kiseleva

*Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus*

Построено аналитическое решение граничной задачи, описывающей процесс проникновения звукового поля сферического излучателя, расположенного внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки, через упругую сферическую оболочку. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля внутри сферической оболочки.

**Ключевые слова:** парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра, бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором, коэффициент ослабления звукового поля.

The analytical solution of a boundary problem, describing the process of penetration of the sound field of a spherical radiator, located inside a thin unclosed spherical shell, through the elastic spherical shell is developed. Influence of some parameters of a problem on the value of the attenuation coefficient (screening) of a sound field inside the spherical shell is numerically investigated.

**Keywords:** dual series equations for Legendre polynomials, infinite system of linear algebraic equations of the second kind with a completely continuous operator, attenuation coefficient of a sound field.

### Введение

Задачи взаимодействия звуковых волн с упругими объектами различной геометрической формы, в частности, сферической, представляют определенный теоретический и практический интерес для различных направлений акустики [1]–[3]. Задачам, относящимся к данной теме исследования, посвящено много научных работ.

Теория резонансного рассеяния используется для решения задачи рассеяния звука упругой, поперечно-изотропной, твердой сферой в акустически идеальной жидкой среде [4]. В [5] получено строгое решение задачи рассеяния плоской звуковой волны на двух упругих телах сферической формы, исследованы эффекты, обусловленные акустическим взаимодействием тел. Аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на сферической полости построено в [6]. Методом аппроксимации проанализировано рассеяние звука на упругой сфере в идеально жидкой среде [7]. В статье [8] рассмотрено обратное рассеяние плоской акустической волны на двух упругих сферических оболочках. В работах [9]–[11] численно исследовано рассеяние плоской звуковой волны на сферах и сферических оболочках с покрытием в идеальной жидкости. Методом разделения переменных построено аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической

полостью [12]. Рассеяние акустических волн упругими оболочками с помощью асимптотических методов исследовано в [13].

В данной работе построено точное осесимметричное решение задачи о проникновении звукового поля через сферический упругий слой. В качестве источника поля рассматривается сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Используя соответствующие теоремы сложения, решение поставленной краевой задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля.

### 1 Постановка и представление решения задачи

Пусть пространство  $R^3$  разделено concentрическими сферами  $S_1(r_1 = a_1)$  и  $S_2(r_1 = a_2)$  с центром в точке  $O_1$  на три области  $D_0(r_1 > a_1)$ ,  $D_1(a_2 < r_1 < a_1)$ ,  $D_2(0 \leq r_1 < a_2)$  (рисунок 1.1). В области  $D_0$  находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка  $\Gamma_1$  с углом раствора  $\theta_0$ , расположенная на сфере  $\Gamma$  радиуса  $a$  с центром в

точке  $O$ . Область пространства, ограниченную сферой  $\Gamma$ , обозначим через  $D_0^{(0)}$  ( $0 \leq r < a$ ) и  $D_0^{(1)} = D_0 \setminus (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$ . Расстояние между точками  $O$  и  $O_1$  обозначим через  $h$ .

В точке  $O$  расположен точечный излучатель звуковых волн, колеблющихся с круговой частотой  $\omega$ . Области  $D_j$ ,  $j = 0, 2$ , заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность среды и скорость звука в области  $D_j$  обозначим соответственно через  $\tilde{\rho}_j$ ,  $c_j$ ,  $j = 0, 2$ . Область  $D_2$  – сферический упругий слой. Под воздействием звукового поля упругий слой совершает колебания, его деформация определяется вектором смещения  $\vec{u}$ , который удовлетворяет уравнению Ламе [14], [15]

$$\tilde{\mu} \Delta \vec{u} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \text{grad div } \vec{u} + \omega^2 \tilde{\rho} \vec{u} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа,  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$  – коэффициенты Ламе,  $\tilde{\rho}$  – плотность материала упругой среды.

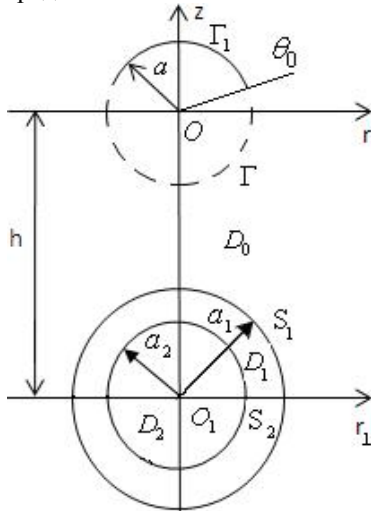


Рисунок 1.1 – Геометрия задачи

Для решения задачи свяжем с точками  $O$  и  $O_1$  сферические координаты. Тонкая незамкнутая сферическая оболочка  $\Gamma_1$  и сферические оболочки  $S_j$ ,  $j = 1, 2$ , описываются следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{r = a, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$S_j = \{r_1 = a_j, 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Обозначим через  $p_c$  давление звукового поля источника,  $p_0^{(0)}$  – давление рассеянного звукового поля в области  $D_0^{(0)}$ ,  $p_0 = p_0^{(1)} + p_0^{(2)}$  – давление рассеянного звукового поля в области  $D_0^{(1)}$ ,  $p_2$  – давление рассеянного звукового поля в области  $D_2$ .

Реальное смещение и звуковое давление вычислим по формулам

$$\vec{U} = \text{Re}(\vec{u} e^{-i\omega t}), \quad P_j = \text{Re}(p_j e^{-i\omega t}), \quad j = 0, 2,$$

$i$  – мнимая единица.

В установившемся режиме колебаний давления рассеянного звукового поля  $p_0^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ ,  $p_2$ , удовлетворяют уравнению Гельмгольца [15]–[17]

$$\Delta p_0^{(j)} + k_0^2 p_0^{(j)} = 0 \quad \text{в } D_0;$$

$$\Delta p_2 + k_2^2 p_2 = 0 \quad \text{в } D_2,$$

где  $k_0 = \omega / c_0$ ,  $k_2 = \omega / c_2$  – волновые числа.

В случае распространения малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела вектор смещения  $\vec{u}$  определяется по формуле (осесимметричная задача) [14]

$$\vec{u} = \text{grad} \psi + \text{rot} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi \right) \quad (1.2)$$

где функции  $\psi$ ,  $\Phi$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta \psi + k_\ell^2 \psi = 0, \quad k_\ell = \omega / c_\ell, \quad c_\ell = \sqrt{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) / \tilde{\rho}},$$

$$\Delta \Phi + k_t^2 \Phi = 0, \quad k_t = \omega / c_t, \quad c_t = \sqrt{\tilde{\mu} / \tilde{\rho}},$$

$c_\ell$ ,  $c_t$  – скорость распространения продольных и поперечных упругих волн соответственно.

В сферической системе координат компоненты вектора смещения  $\vec{u}$  связаны с функциями  $\psi$ ,  $\Phi$  соотношениями

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right) + r_1 k_t^2 \Phi, \quad (1.3)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \right).$$

Решение дифракционной задачи сводится к нахождению вектора смещения  $\vec{u}$ , давлений звукового поля  $p_0^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ ,  $p_2$ , которые удовлетворяют:

– граничному условию на поверхности сферической акустически жесткой оболочки  $\Gamma_1$ ;

$$\frac{\partial}{\partial r} (p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (1.4)$$

– граничным условиям взаимодействия звукового поля с упругим слоем на оболочках  $S_j$ ,  $j = 1, 2$  [15]:

$$u_r \Big|_{S_j} = \begin{cases} \omega^{-2} \tilde{\rho}_0^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial r_1} \Big|_{S_1}, & j = 1, \\ \omega^{-2} \tilde{\rho}_2^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial r_1} \Big|_{S_2}, & j = 2, \end{cases}$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial u_r}{\partial \theta_1} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r_1} - \frac{1}{r_1} u_\theta \Big|_{S_j} = 0,$$

$$\left. (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \frac{\partial u_r}{\partial r_1} + \frac{2\tilde{\lambda}}{r_1} u_r + \frac{\tilde{\lambda}}{r_1} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{r_1} \text{ctg} \theta_1 u_\theta \right|_{s_j} = \begin{cases} -p_0|_{s_1}, & j=1, \\ -p_2|_{s_2}, & j=2, \end{cases} \quad (1.5)$$

и условию на бесконечности [14]–[17]

$$\lim_{M \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial p_0(M)}{\partial r} - i k_0 p_0(M) \right) = 0, \quad (1.6)$$

где  $M$  – произвольная точка пространства.

Потребуем также выполнение условия непрерывности давлений на открытой части сферической оболочки  $\Gamma \setminus \Gamma_1$ :

$$(p_c + p_0^{(0)})|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = (p_0^{(1)} + p_0^{(2)})|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}, \quad (1.7)$$

и непрерывности нормальной производной на поверхности сферы  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} (p_c + p_0^{(0)})|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (p_0^{(1)} + p_0^{(2)})|_{\Gamma}, \quad (1.8)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности  $\Gamma$ .

Давление исходного звукового поля представим в виде [17]

$$p_c(r, \theta) = P \frac{e^{ik_0 r}}{r} = ik_0 P h_0^{(1)}(kr) = P \sum_{n=0}^{\infty} f_n h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (1.9)$$

$$f_n = ik_0 \delta_{0n},$$

где  $h_n^{(1)}(x)$  – сферические функции Ханкеля;  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра [18];  $\delta_{0n}$  – символ Кронекера;  $P = \text{const}$  [16].

Давления рассеянного звукового поля, функции  $\psi$ ,  $\Phi$ , с учетом условия на бесконечности (1.6), представим в виде суперпозиции базисных решений уравнения Гельмгольца в сферических координатах:

$$p_0^{(0)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} c_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta) \text{ в } D_0^{(0)}, \quad (1.10)$$

$$p_0^{(1)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} x_n h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta) \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.11)$$

$$p_0^{(2)}(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} y_n h_n^{(1)}(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1) \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.12)$$

$$p_2(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} d_n j_n(k_2 r_1) P_n(\cos \theta_1) \text{ в } D_2, \quad (1.13)$$

$$\psi(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{a}_n^{(1)} j_n(k_l r_1) + \tilde{b}_n^{(1)} h_n^{(1)}(k_l r_1)) P_n(\cos \theta_1), \quad (1.14)$$

$$\Phi(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(1)} j_n(k_l r_1) + b_n^{(1)} h_n^{(1)}(k_l r_1)) P_n(\cos \theta_1), \quad (1.15)$$

где  $j_n(x)$  – сферические функции Бесселя первого рода [18].

Неизвестные коэффициенты  $c_n, x_n, y_n, d_n, a_n^{(1)}, b_n^{(1)}, \tilde{a}_n^{(1)}, \tilde{b}_n^{(1)}$  подлежат определению из граничных условий.

## 2 Выполнение граничных условий

Для выполнения граничных условий (1.4), (1.7), (1.8) представим функцию  $p_0^{(2)}(r_1, \theta_1)$  через сферические волновые функции в системе координат с началом в точке  $O$ . Используем формулу [19], связывающую цилиндрические и сферические волновые функции

$$h_n^{(1)}(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{np}(h) j_p(k_0 r) P_p(\cos \theta), \quad r_1 < h,$$

$$\text{где } A_{np}(h) = (2p+1) \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} i^{\sigma+p-n} b_{\sigma}^{(n_0 p_0)} h_{\sigma}^{(1)}(k_0 h),$$

$b_{\sigma}^{(n_0 p_0)} = (nq00 | \sigma 0)^2, (nq00 | \sigma 0)$  – коэффициенты Клебша – Гордона [17].

Тогда

$$p_0^{(2)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} T_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta),$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{\infty} y_k A_{kn}(h). \quad (2.1)$$

Согласно представлениям (1.9)–(1.11), (2.1), условие непрерывности (1.8), с учетом условия ортогональности полиномов Лежандра на отрезке  $[0; \pi]$ , примет вид

$$f_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) + c_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) = x_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) + T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0),$$

$$\xi_0 = k_0 a, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Выполним граничное условие (1.4) на поверхности сферической оболочки  $\Gamma$  и условие непрерывности (1.7). В полученных уравнениях исключим коэффициенты  $c_n$ , используя представление (2.2), и получим парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра вида

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) P_n(\cos \theta) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) P_n(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (2.3) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n - f_n}{d\xi_0} P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \end{aligned} \right.$$

Преобразуем парные сумматорные уравнения (2.3). Для этого введем в рассмотрение новые коэффициенты  $X_n$  по формуле

$$x_n = X_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) + f_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

и малый параметр  $g_n$  по формуле

$$g_n = 1 + \frac{4i\xi_0^3}{2n+1} \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0),$$

$$g_n = O(n^{-2}) \text{ при } n \gg \xi_0.$$

В результате парные сумматорные уравнения (2.3) примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(1-g_n) X_n P_n(\cos\theta) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(\tilde{f}_n + \tilde{T}_n) P_n(\cos\theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{T}_n = 4i\xi_0^3 T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) / (2n+1),$$

$$\tilde{f}_n = 4i\xi_0^3 f_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) / (2n+1). \quad (2.6)$$

Используя интегральные представления для полиномов Лежандра, парные сумматорные уравнения (2.5) преобразуем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода с вполне непрерывным оператором [20], [21]

$$X_n - \sum_{k=0}^{\infty} g_k R_{nk} X_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{T}_k + \tilde{f}_k) R_{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.7)$$

$$R_{nk} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(n-k)\theta_0}{n-k} - \frac{\sin(n+k+1)\theta_0}{n+k+1} \right],$$

$$\frac{\sin(n-k)\theta_0}{n-k} \Big|_{n=k} = \theta_0.$$

Используя формулу [19], представим функцию  $p_0^{(1)}(r, \theta)$  через сферические волновые функции в системе координат с началом в точке  $O_1$

$$h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} B_{np}(h) j_p(k_0 r_1) P_p(\cos\theta_1), \quad r_1 < h,$$

$$B_{np}(h) = (2l+1) \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} (-1)^\sigma i^{\sigma+p-n} b_\sigma^{(n0p0)} h_\sigma^{(1)}(k_0 h).$$

Тогда

$$p_0^{(1)}(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} Z_n j_n(k_0 r_1) P_n(\cos\theta_1),$$

$$Z_n = \sum_{p=0}^{\infty} x_p B_{pn}(h). \quad (2.8)$$

Принимая во внимание представления (1.12)–(1.15), (2.8), выполняя граничные условия (1.5), учитывая [18], что

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_n(\cos\theta_1) + \text{ctg}\theta_1 \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta_1) =$$

$$= -n(n+1) P_n(\cos\theta_1),$$

$$\frac{d^2}{dr_1^2} f_n(kr_1) + \frac{1}{r_1} \frac{d}{dr_1} f_n(kr_1) +$$

$$+(k^2 - n(n+1)/r_1^2) f_n(kr_1) = 0,$$

где  $f_n(kr_1)$  – сферическая функция, и ортогональность полиномов Лежандра  $P_n(\cos\theta_1)$  на отрезке  $[0, \pi]$ , получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$M(n) \cdot V(n) = F(n) \cdot Z_n, \quad (2.9)$$

где

$$M(n) =$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}(n) & m_{12}(n) & m_{13}(n) & m_{14}(n) & m_{15}(n) & 0 \\ m_{21}(n) & m_{22}(n) & m_{23}(n) & m_{24}(n) & 0 & 0 \\ m_{31}(n) & m_{32}(n) & m_{33}(n) & m_{34}(n) & m_{35}(n) & 0 \\ m_{41}(n) & m_{42}(n) & m_{43}(n) & m_{44}(n) & 0 & m_{46}(n) \\ m_{51}(n) & m_{52}(n) & m_{53}(n) & m_{54}(n) & 0 & 0 \\ m_{61}(n) & m_{62}(n) & m_{63}(n) & m_{64}(n) & 0 & m_{66}(n) \end{pmatrix},$$

$$V(n) = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} \\ \tilde{a}_n^{(1)} \\ \tilde{b}_n^{(1)} \\ y_n \\ d_n \end{pmatrix}, \quad F(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ 0 \\ f_3(n) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$m_{11}(n) = \frac{n(n+1)}{a_1} j_n(\xi_1^1),$$

$$m_{12}(n) = \frac{n(n+1)}{a_1} h_n^{(1)}(\xi_1^1),$$

$$m_{13}(n) = k_\ell \frac{d}{d\xi_\ell^1} j_n(\xi_\ell^1),$$

$$m_{14}(n) = k_\ell \frac{d}{d\xi_\ell^1} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1),$$

$$m_{15}(n) = -\frac{k_0}{\tilde{\rho}_0 \omega^2} \frac{d}{d\xi_0^1} h_n^{(1)}(\xi_0^1),$$

$$m_{21}(n) = -\frac{2}{a_1} k_t \frac{d}{d\xi_t^1} j_n(\xi_t^1) +$$

$$+ (2n(n+1)/a_1^2 - k_t^2 - 2/a_1) j_n(\xi_t^1),$$

$$m_{22}(n) = -\frac{2}{a_1} k_t \frac{d}{d\xi_t^1} h_n^{(1)}(\xi_t^1) +$$

$$+ (2n(n+1)/a_1^2 - k_t^2 - 2/a_1) h_n^{(1)}(\xi_t^1),$$

$$m_{23}(n) = \frac{2k_\ell}{a_1} \frac{d}{d\xi_\ell^1} j_n(\xi_\ell^1) - \frac{2}{a_1^2} j_n(\xi_\ell^1),$$

$$m_{24}(n) = \frac{2k_\ell}{a_1} \frac{d}{d\xi_\ell^1} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1) - \frac{2}{a_1^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1),$$

$$\begin{aligned}
 m_{31}(n) &= \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_1} \left( k_t \frac{d}{d\xi_t^1} j_n(\xi_t^1) - j_n(\xi_t^1) / a_1 \right), \\
 m_{32}(n) &= \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_1} \left( k_t \frac{d}{d\xi_t^1} h_n^{(1)}(\xi_t^1) - h_n^{(1)}(\xi_t^1) / a_1 \right), \\
 m_{33}(n) &= -\frac{4\tilde{\mu}k_\ell}{a_1} \frac{d}{d\xi_\ell^1} j_n(\xi_\ell^1) - \\
 &\quad -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})k_\ell^2 j_n(\xi_\ell^1) + \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_1^2} j_n(\xi_\ell^1), \\
 m_{34}(\lambda) &= -\frac{4\tilde{\mu}k_\ell}{a_1} \frac{d}{d\xi_\ell^1} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1) - \\
 &\quad -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})k_\ell^2 h_n^{(1)}(\xi_\ell^1) + \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_1^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1), \\
 m_{35}(\lambda) &= h_n^{(1)}(\xi_0^1), \\
 m_{41}(n) &= \frac{n(n+1)}{a_2} j_n(\xi_t^2), \\
 m_{42}(n) &= \frac{n(n+1)}{a_2} h_n^{(1)}(\xi_t^2), \\
 m_{43}(n) &= k_\ell \frac{d}{d\xi_\ell^2} j_n(\xi_\ell^2), \\
 m_{44}(n) &= k_\ell \frac{d}{d\xi_\ell^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2), \\
 m_{46}(n) &= -\frac{k_2}{\tilde{\rho}_2 \omega^2} \frac{d}{d\xi_2^2} j_n(\xi_2^2), \\
 m_{51}(n) &= -\frac{2}{a_2} k_t \frac{d}{d\xi_t^2} j_n(\xi_t^2) + \\
 &\quad + (2n(n+1) / a_2^2 - k_t^2 - 2 / a_2) j_n(\xi_t^2), \\
 m_{52}(n) &= -\frac{2}{a_2} k_t \frac{d}{d\xi_t^2} h_n^{(1)}(\xi_t^2) + \\
 &\quad + (2n(n+1) / a_2^2 - k_t^2 - 2 / a_2) h_n^{(1)}(\xi_t^2), \\
 m_{53}(n) &= \frac{2k_\ell}{a_2} \frac{d}{d\xi_\ell^2} j_n(\xi_\ell^2) - \frac{2}{a_2^2} j_n(\xi_\ell^2), \\
 m_{54}(n) &= \frac{2k_\ell}{a_2} \frac{d}{d\xi_\ell^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2) - \frac{2}{a_2^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2), \\
 m_{61}(n) &= \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_2} \left( k_t \frac{d}{d\xi_t^2} j_n(\xi_t^2) - j_n(\xi_t^2) / a_2 \right), \\
 m_{62}(n) &= \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_2} \left( k_t \frac{d}{d\xi_t^2} h_n^{(1)}(\xi_t^2) - h_n^{(1)}(\xi_t^2) / a_2 \right), \\
 m_{63}(n) &= -\frac{4\tilde{\mu}k_\ell}{a_2} \frac{d}{d\xi_\ell^2} j_n(\xi_\ell^2) - \\
 &\quad -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})k_\ell^2 j_n(\xi_\ell^2) + \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_2^2} j_n(\xi_\ell^2), \\
 m_{64}(\lambda) &= -\frac{4\tilde{\mu}k_\ell}{a_2} \frac{d}{d\xi_\ell^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})k_\ell^2 h_n^{(1)}(\xi_\ell^2) + \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_2^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2), \\
 m_{66}(n) &= j_n(\xi_2^2), \\
 f_1(n) &= \frac{k_0}{\tilde{\rho}_0 \omega^2} \frac{d}{d\xi_0^1} j_n(\xi_0^1), \quad f_3(n) = -j_n(\xi_0^1), \\
 \xi_0^1 &= k_0 a_1, \quad \xi_t^1 = k_t a_1, \quad \xi_\ell^1 = k_\ell a_1, \quad \xi_t^2 = k_t a_2, \\
 \xi_\ell^2 &= k_\ell a_2, \quad \xi_2^2 = k_2 a_2.
 \end{aligned}$$

Решая систему (2.9), находим представление для коэффициентов  $y_n$ :

$$y_n = |M_5(n)| Z_n / |M(n)|, \quad (2.10)$$

где  $|M(n)|$  – определитель матрицы  $M(n)$ ,

$|M_5(n)|$  – определитель матрицы  $M_5(n)$ ,

$M_5(n)$  – матрица  $M(n)$ , в которой пятый столбец заменен на вектор  $F(n)$ .

Подставим коэффициенты  $y_n$  из (2.10) в (2.1) и установим связь между коэффициентами  $T_n$  и  $Z_k$ . В полученном выражении заменим коэффициенты  $Z_k$  представлением (2.8), коэффициенты  $x_n$  – (2.4) и получим связь между коэффициентами  $T_k$  и  $X_p$ :

$$T_k = \sum_{p=0}^{\infty} S_{pk} X_p + \tilde{f}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned}
 S_{pk} &= \frac{d}{d\xi_0^1} j_p(\xi_0^1) \sum_{s=0}^{\infty} |M_5(s)| / |M(s)| B_{ps}(h) A_{sk}(h), \\
 \tilde{f}_k &= ik_0 \sum_{s=0}^{\infty} |M_5(s)| / |M(s)| B_{0s}(h) A_{sk}(h).
 \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть системы (2.7). Для этого исключим из правой части коэффициенты  $\tilde{T}_k$  с помощью представления (2.11), учитывая (2.6), и получим бесконечную СЛАУ второго рода:

$$\begin{aligned}
 X_n - \sum_{k=0}^{\infty} (g_k R_{nk} + \alpha_{nk}) X_k = \\
 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \tilde{f}_k + 4i\xi_0^3 \frac{d}{d\xi_0^1} j_k(\xi_0^1) \tilde{f}_k / (2k+1) \right) R_{nk}, \quad (2.12) \\
 n = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{nk} = 4i\xi_0^3 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d}{d\xi_0^1} j_p(\xi_0^1) R_{np} S_{kp} / (2p+1).$$

Найдем связь между коэффициентами  $d_n$ , входящими в представление давления  $p_2(r_1, \theta_1)$  в области  $D_2$ , и коэффициентами  $X_n$  – решениями системы (2.12). Из системы (2.9) следует, что

$$d_n = |M_6(n)| Z_n / |M(n)|. \quad (2.13)$$

где  $|M_6(n)|$  – определитель матрицы  $M_6(n)$ ,

$M_6(n)$  – матрица  $M(n)$ , в которой шестой столбец заменен на вектор  $F(n)$ .

Из представлений (2.4), (2.8), (2.10) следует, что

$$d_n = |M_6(n)| / |M(n)| \times \sum_{p=0}^{\infty} \left( X_p \frac{d}{d\xi_0} j_p(\xi_0) + f_p \right) B_{pn}(h).$$

Коэффициент ослабления (экранирования) звукового поля в области  $D_2$  вычислим по формуле

$$K(r_1, \theta_1) = |p_2(r_1, \theta_1)| / |p_c(r_1, \theta_1)|, \quad 0 \leq r_1 < a_2, \quad (2.14)$$

где

$$p_c(r_1, \theta_1) = \text{Pik}_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_{0n}(h) j_n(k_2 r_1) P_n(\cos \theta_1).$$

### 3 Вычислительный эксперимент

В системе компьютерной алгебры MathCAD [2] были проведены вычисления коэффициента ослабления звукового поля  $K(r_1, \theta_1)$  в области  $D_2$  для некоторых параметров задачи.

Сферические функции

$$j_n(x), \quad h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x)$$

вычислены с помощью встроенных функций  $js(n, x)$  и  $ys(n, x)$ , здесь  $y_n(x)$  – сферическая функция Бесселя второго рода [18]. Производные сферических функций вычислены с помощью формулы [18, с. 258]

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = n f_n(x) / x - f_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Коэффициенты Клебша – Гордона  $b_{\sigma}^{(n_0 q_0)}$  вычислены по формуле (3.4.17) [17, с. 127].

Бесконечная система (2.12) решена методом усечения [17], [24]. Для получения достоверного решения конечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо было проверить обусловленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы меньше 300 [23, с. 150]. Для вычисления числа обусловленности матрицы использовали встроенные функции  $\text{cond1}$  (число обусловленности в норме  $L_1$  [24]),  $\text{cond2}$  (в норме  $L_2$ ) и  $\text{conde}$  (в евклидовой норме). Вычислительный эксперимент показал, что для рассмотренных параметров задачи порядок усечения матрицы можно взять равным 25. Это обеспечивает решение конечной системы (2.12) с точностью  $10^{-5}$  и число обусловленности не будет превосходить 25. Все бесконечные суммы, входящие в представление (2.12), вычислены с точностью  $10^{-5}$ .

На рисунке 3.1 изображены графики коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля  $K(0,5; \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений

угла раствора  $\theta_0$ , если область  $D_0$  заполнена морской водой ( $\tilde{\rho}_0 = 1030 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 1533 \text{ м/с}$ ), область  $D_2$  – машинным маслом ( $\tilde{\rho}_2 = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_2 = 1390 \text{ м/с}$ ), область  $D_1$  – алюминием ( $\tilde{\rho} = 2600 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 65 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$  – модуль Юнга,  $\nu = 0,32$  – коэффициент Пуассона),  $a_1 = 1 \text{ м}$ ,  $a_2 = 0,8 \text{ м}$ ,  $a = 0,3 \text{ м}$ ,  $h = 3 \text{ м}$ ,  $f = 100 \text{ Гц}$ ,  $\omega = 2\pi f$ . Коэффициенты Ламе связаны с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона соотношениями

$$\tilde{\lambda} = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu)), \quad \tilde{\mu} = E / (2 + 2\nu).$$

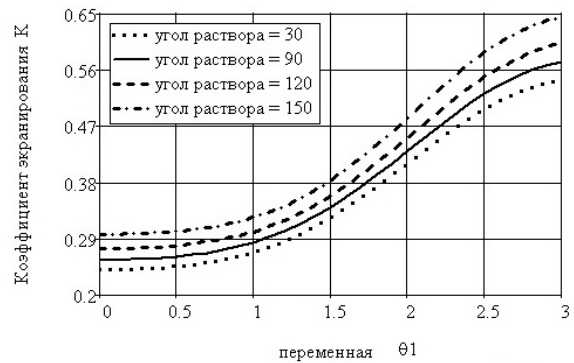


Рисунок 3.1 – Графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(0,5; \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений угла раствора  $\theta_0$  сферической оболочки  $\Gamma_1$

На рисунке 3.2 изображены графики коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля  $K(0,3; \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , если область  $D_0$  заполнена водой ( $\tilde{\rho}_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 1500 \text{ м/с}$ ), область  $D_1$  – стеклом ( $\tilde{\rho} = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 49 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$  – модуль Юнга,  $\nu = 0,3$  – коэффициент Пуассона), область  $D_2$  – эфиром ( $\tilde{\rho}_2 = 710 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_2 = 985 \text{ м/с}$ ) – график 1, ацетоном ( $\tilde{\rho}_2 = 780 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_2 = 1170 \text{ м/с}$ ) – график 2, машинным маслом ( $\tilde{\rho}_2 = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_2 = 1390 \text{ м/с}$ ) – график 3, морской водой ( $\tilde{\rho}_0 = 1030 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 1533 \text{ м/с}$ ) – график 4,  $a_1 = 1 \text{ м}$ ,  $a_2 = 0,85 \text{ м}$ ,  $a = 0,2 \text{ м}$ ,  $h = 2,5 \text{ м}$ ,  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ .

На рисунке 3.3 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(r_1, \theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений переменной  $r_1 < a_2$  ( $r_1 = 0,1$  – график 1,  $r_1 = 0,3$  – график 2,  $r_1 = 0,6$  – график 3,  $r_1 = 0,8$  – график 4), если область  $D_0$  заполнена водой ( $\tilde{\rho}_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 1500 \text{ м/с}$ ), область  $D_1$  – каучуком ( $\tilde{\rho} = 910 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 79 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$  – модуль Юнга,  $\nu = 0,46$  – коэффициент Пуассона), область  $D_2$  – машинным маслом ( $\tilde{\rho}_2 = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_2 = 1390 \text{ м/с}$ ),  $a_1 = 1 \text{ м}$ ,  $a_2 = 0,9 \text{ м}$ ,  $a = 0,3 \text{ м}$ ,  $h = 3 \text{ м}$ ,  $\theta_0 = 2\pi/3$ ,  $f = 20 \text{ Гц}$ .

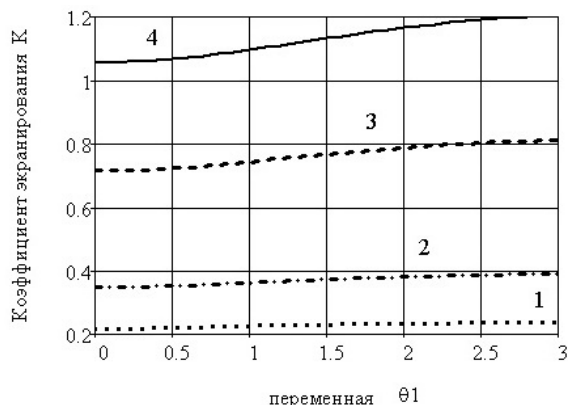


Рисунок 3.2 – Графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(0,3;\theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , в случае заполнения области  $D_2$  различными веществами

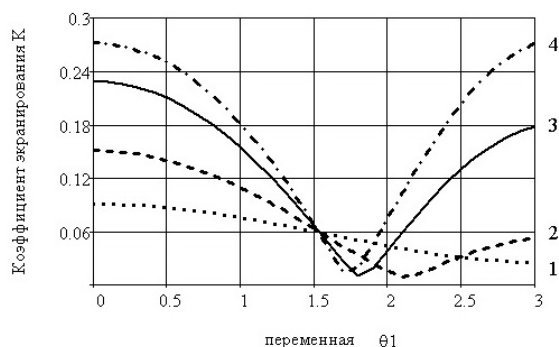


Рисунок 3.3 – Графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(r_1,\theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений переменной  $r_1$

На рисунке 3.4 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(0,1;\theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для различных значений частоты исходного поля  $f$  и тех же геометрических параметров задачи и сред, как и на рисунке 3.3.

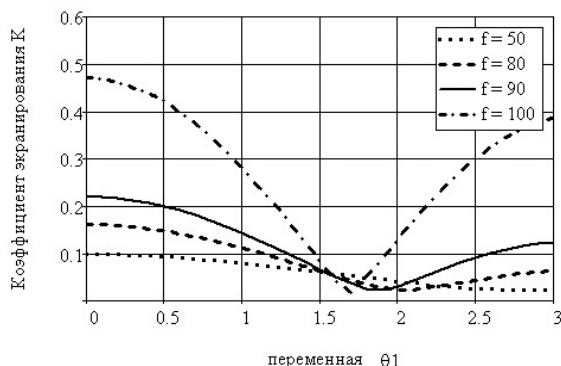


Рисунок 3.4 – Графики коэффициента ослабления звукового поля  $K(0,1;\theta_1)$ ,  $0 \leq \theta_1 < \pi$ , для некоторых значений частоты исходного поля  $f$

### Заключение

Получено точное осесимметричное решение задачи о проникновении звукового поля через упругий сферический слой. В качестве источника звукового поля рассмотрен сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической акустически жесткой оболочки. Используя теоремы сложения для сферических волновых функций, решение поставленной задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра. Парные уравнения преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором.

Численно исследовано влияние геометрических параметров задачи, плотности сред, частоты звукового источника, модуля Юнга, коэффициента Пуассона и скорости звука в средах на значение коэффициента ослабления звукового поля.

Разработанная методика и программное обеспечение могут найти практическое применение при разработке и конструировании звуковых экранов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Raichel, D.R. The science and applications of acoustics / D.R. Raichel // NY : Springer Science+Business Media. – 2006. – 663 p.
2. IFToMM International Conference on Engineering Vibration [Electronic resource]. – Режим доступа : <http://www.icovp.com>. – Дата доступа : 07.01.2014.
3. IV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Защита населения от повышенного шумового воздействия» // [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://onlinereg.ru/noise2013>. – Дата доступа : 07.01.2014.
4. Хашеминеджад, С.М. Резонансное рассеяние звука погруженной анизотропной сферой / С.М. Хашеминеджад, М. Малек // Акустический журнал. – 2008. – № 2. – С. 205–218.
5. Лебедев, А.В. Рассеяние плоской волны на двух упругих шарах и сферических оболочках / А.В. Лебедев, А.И. Хилько // Акустический журнал. – 1997. – № 4. – С. 521–530.
6. Сивухин, Д.В. Дифракция плоской звуковой волны на сферической полости / Д.В. Сивухин // Акустический журнал. – 1955. – № 1. – С. 78–88.
7. Latard, V. Acoustic scattering of impulsive geometrical waves by a glass sphere in water / V. Latard [et al.] // Applied physics letters. – 1999. – Vol. 74. – P. 1918–1921.
8. Huang, H. Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells / H. Huang, G.C. Gaunard // Journ. Soc. Amer. – 1995. – Vol. 98. – P. 2149–2156.
9. Hasheminejad, S.M. Effects of dynamic viscoelastic properties on acoustic diffraction by a solid

sphere submerged in a viscous fluid. / S.M. Hasheminejad, B. Harsini // Archives of Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 72. – P. 697–712.

10. Hasheminejad, S.M. Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids / S.M. Hasheminejad, N. Safari // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 280. – P. 101–125.

11. Mitri, F.G. Acoustic radiation force acting on absorbing spherical shells / F.G. Mitri // Wave Motion. – 2005. – Vol. 43. – P. 12–19.

12. Толоконников, Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической полостью / Л.А. Толоконников, Ю.М. Филатова // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2010. Вып.1. – С. 115–123.

13. Ковалев, В.А. Математическое моделирование в задачах рассеяния акустических волн упругими оболочками с помощью асимптотических методов / В.А. Ковалев, Е.Д. Ковалева // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2008. – № 6 – С. 244 – 259.

14. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий – М. : Мир. – 1970. – 873 с.

15. Гринченко, В.Т. Основы акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура. – Киев : Наукова думка, 2007. – 640 с.

16. Шендарев, Е.Л. Излучение и рассеяние звука. / Е.Л. Шендарев. – Л. : Судостроение, 1989. – 304 с.

17. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.

18. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.

19. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.

20. Шушкевич, Г.Ч. Расчет электростатических полей методом парных, тройных уравнений с использованием теорем сложения / Г.Ч. Шушкевич. – Гродно : ГрГУ, 1999. – 238 с.

21. Резуненко, В.А. Дифракция плоской звуковой волны на сфере с круговым отверстием / В.А. Резуненко // Вісник Харків. нац. універ. ім. В.Н. Каразіна. Сер. «Мат., прик. мат. і мех.». – 2009. – № 850. – С. 71–77.

22. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 1. / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 287 с.

23. Петров, Ю. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю. Петров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 160 с.

24. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2002. – 848 с.

Поступила в редакцию 18.02.14.